Les suites

I. Sens de variation d'une suite.

Définitions :

Soit (u_n) une suite et n_0 un entier naturel.
1. On dit que la suite (u_n) est croissante à partir du rang n_0 si, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$.
2. On dit que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang n_0 si, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq$ un.
3. On dit que la suite (u_n) est stationnaire à partir du rang n_0 si, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq$ un.
4. On dit que la suite (u_n) est monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

Méthode :

Pour déterminer le sens de variation d'une suite, on peut :

1. Etudier le signe de la différence $u_{n+1}-u_n$
2. Lorsque (u_n) est une suite à termes strictement positifs, comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
3. Lorsque (u_n) est définie de manière explicite, c'est-à-dire telle que $u_n=f(n)$ où f est une fonction connue, étudier les variations de la fonction f.
4. Dans le cas où $u_{n+1}=f(u_n)$, se laisser guider par l'énoncé. La plupart du temps on étudiera le signe de $u_{n+1}-u_n$. **Attention :** ce n'est pas parce que f est croissante que la suite sera croissante.
5. Utiliser un raisonnement par récurrence.

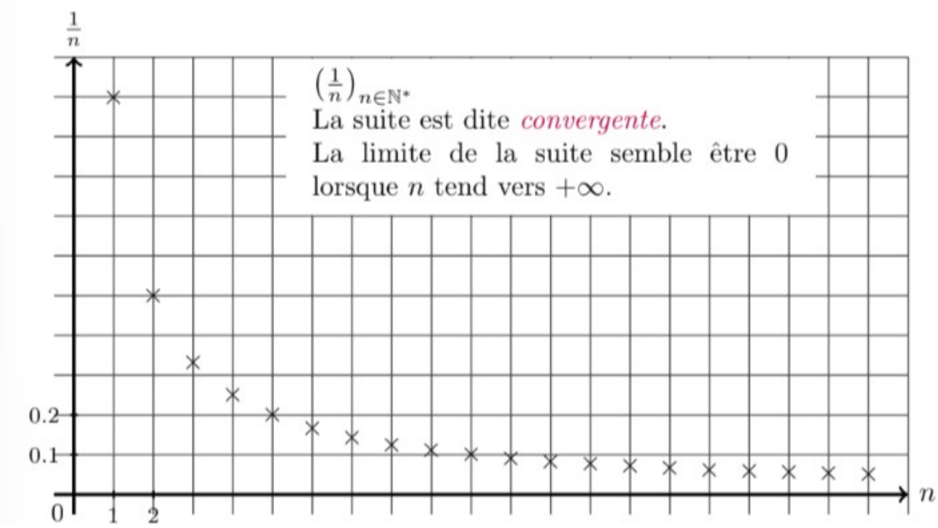
II. Suite majorée, minorée, bornée.

Définitions :
Soit (u_n) une suite et m et M deux réels.
On dit que (u_n) est majorée par M lorsque, pour tout entier naturel n, $u_n \leq M$: M est appelé majorant de la suite.
On dit que (u_n) est minorée par m lorsque, pour tout entier naturel n, $u_n \geq m$: m est appelé minorant de la suite.
On dit que (u_n) est bornée lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

III. Limite d'une suite.

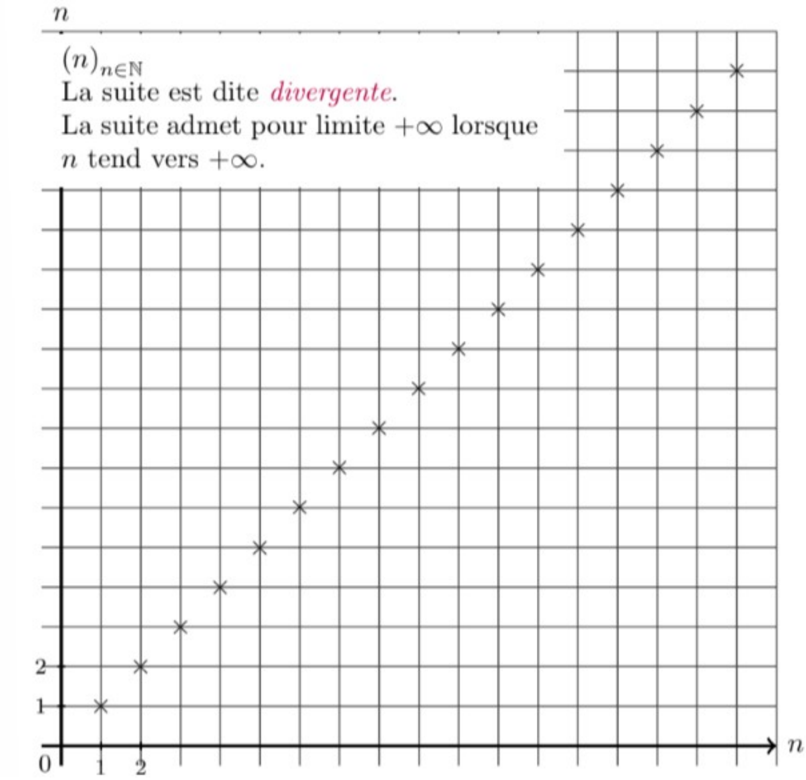
Définitions :
Soit l un nombre réel. Dire qu'une suite (u_n) converge vers l (ou tend vers l) signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Autrement dit, pour tout réel $\varepsilon>0$, on peut trouver un rang n_0 tel que : pour tout entier $n \geq n_0$, on a : $l-\varepsilon<u_n<l+\varepsilon$ soit encore $u_n \in \,]l-\varepsilon \,;\, l+\varepsilon[$ ce qui s'écrit aussi $|u_n-l| < \varepsilon$
On dit alors que la suite est **convergente**. On dit qu'une suite est **divergente** lorsqu'elle ne converge pas.
Si (u_n) converge vers l, alors le réel l est unique et appelé limite de la suite (u_n).
On note alors : $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$

Yaël Nessim



Définition :

Dire qu'une suite (u_n) a pour limite +∞ quand n tend vers +∞ signifie que tout intervalle de la forme]A;+∞[(avec A réel) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.



Dire qu'une suite (u_n) a pour limite -∞ quand n tend vers +∞ signifie que tout intervalle de la forme]-∞ ;B[(avec B réel) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

IV. Opérations sur les limites

(u_n) et (v_n) sont deux suites, et L et L' sont deux réels.
FI correspond à une forme indéterminée, c'est à dire un cas où on ne peut pas conclure directement.

si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	$L<0$	$L<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$L>0$	$L>0$	0
si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n =$	LL'	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

V. Limites et comparaison :

Théorème :
Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que :

- u_n est inférieur ou égal à v_n à partir d'un certain rang
- u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$

Alors (v_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$

Théorème d'encadrement dit « des gendarmes » :
Soient (u_n) , (v_n) , (w_n) trois suites et L un nombre réel.
Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et si les suites (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite L, alors (u_n) converge vers L.

Théorème : suites monotones croissantes
Si la suite (u_n) est croissante et converge vers l, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à l.

Théorème : suites monotones décroissantes
Si la suite (u_n) est décroissante et converge vers l, alors tous les termes de la suite sont supérieurs ou égaux à l.

Théorème : convergence de suites majorées
Toute suite croissante et majorée converge.

Théorème : Divergence de suites croissantes non majorées
Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$

VI. Comportement à l'infini de la suite (q^n), q étant un nombre réel.

On considère un réel q. La suite (q^n) des puissances de q converge si et seulement si : $-1 \leq q \leq 1$
Plus précisément :
Si $q>1$, alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$.
Si $-1<q<1$, la suite (q^n) converge vers 0
Si $q \leq -1$, la suite (q^n) diverge et n'admet pas de limite.