Raisonnement par récurrence

I. Effectuer et rédiger un raisonnement par récurrence pour démontrer des formules algébriques.

Méthode :

On donne un nom (P(n)) à la propriété que l'on veut démontrer. Ensuite, on procède en trois étapes pour démontrer la propriété P(n) pour tout $n \geq k$:

Etape 1 : Initialisation : On montre que la propriété P(k) est vraie.

Etape 2 : Hérédité : On suppose que la propriété P(n) est vrais et on montre la propriété P(n+1) l'est encore.

Etape 3 : Conclusion : On rédige alors : « Comme P(k) est vraie et qu'il y a hérédité, P(n) est vraie pour tout $n \geq k$ »

Remarque :

- Il est important d'écrire ce qu'on veut prouver, c'est-à-dire d'écrire en toutes lettres la propriété P(n+1) à démontrer.
- Si on veut prouver que la propriété est vraie pour $n \geq 0$, on commence l'initialisation à P(0). Pour $n \geq 2$, on commence à P(2), etc.

II Application sur les suites.

On donne un nom (P(n)) à la propriété sur les suites que l'on veut démontrer. Ensuite on applique la méthode de la démonstration par récurrence.

III. Exemples d'applications :

Exercice n°1 : Démontrer par récurrence la propriété : pour $n \geq 1$: $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Exercice n°2 : Montrer par récurrence que pour $n \geq 1$, $1+3+5+...+2n-1=n^2$

Exercice n°3 : Soit (U_n) la suite définie par $U_{n+1}=U_n+61$ et $U_0=-267$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $U_n=-267+61n$

Exercice n°4 : Soit (U_n) la suite définie par $U_{n+1}=\frac{n+1}{n}U_n$ et $U_1=1$.

1. Démontrer par récurrence que $U_n>0$ pour tout $n \geq 1$.
2. En déduire que la suite (U_n) est strictement croissante.

Exercice n°5 : Soit (V_n) la suite définie par $V_{n+1}=V_n \times 1,45$ et $V_0=316$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $V_n=316 \times 1,45^n$.

Exercice n°6 : Soit (U_n) la suite définie par $U_{n+1}=\frac{n}{n+1}U_n$ et $U_0=3$.

1. Démontrer par récurrence que $U_n>0$ pour tout $n \geq 0$.
2. En déduire que la suit (U_n) est strictement décroissante.

Yaël Nessim