Fonctions convexes

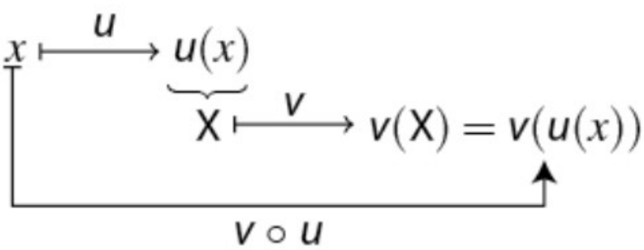
Capacités attendues :

- Savoir calculer la dérivée d’une fonction donnée par une formule simple mettant en jeu opérations algébriques et composition.
- Calculer la fonction dérivée, déterminer les limites et étudier les variations d'une fonction construite simplement à partir des fonctions de référence.
- Démontrer des inégalités en utilisant la convexité d’une fonction.
- Esquisser l’allure de la courbe représentative d’une fonction f à partir de la donnée de tableaux de variations de f, de f' ou de f''.
- Lire sur une représentation graphique de f, de f' ou de f'' les intervalles où f est convexe, concave, et les points d’inflexion. Dans le cadre de la résolution de problème, étudier et utiliser la convexité d’une fonction.

I. Composée de deux fonctions :

Définition :

u est une fonction définie sur un intervalle I et *v* est une fonction définie sur un intervalle J tel que pour tout *x* de I, on ait *v*(*x*) dans J.
La fonction composée de *u* suivie de *v*, notée *v* o *u* (et se lit « *v* rond *u* »), est la fonction définie sur I par : **(*v* o *u*)(x)=*v*(*u*(x))**



Propriété (admise) :

u est une fonction définie sur un intervalle I et *v* est une fonction définie sur un intervalle J tel que pour tout *x* de I, on ait *v*(*x*) dans J.
Si *u* est dérivable sur I et *v* est dérivable sur J, alors la fonction *v* o *u* est dérivable sur I et pour tout réel *x* de I, on a : $(v \circ u)'(x)=(v' \circ u)(x) \times u'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$

Conséquence :

Si *u* est une fonction définie et dérivable sur I et n un entier non nul (et n≠-1) alors :

$(u^n)'=nu^{n-1}u'$ $\qquad (\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ (Si u>0) $\qquad (e^u)'=u'e^u$

<u>II. Dérivée seconde d’une fonction :</u>

<u>Définition :</u>

f est une fonction dérivable sur un intervalle *I*.
Dire que *f* est deux fois dérivable sur I signifie que *f’* est elle-même dérivable sur I.
La fonction dérivée de *f’*, notée *f”*, est appelée **fonction dérivée seconde de *f***.

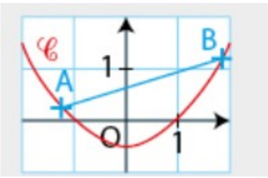
<u>III. Fonction convexe sur un intervalle :</u>

<u>Définition :</u>

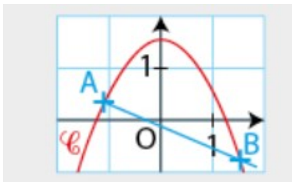
f est une fonction définie sur un intervalle I.
𝒞 est sa courbe représentative sur l’intervalle I dans un repère.

- Dire que **f est convexe sur I** signifie que pour tous points A et B distincts de , le segment [AB] est au-dessus de la courbe 𝒞 entre A et B.
- Dire que **f est concave sur I** signifie que pour tous points A et B de 𝒞, le segment [AB] est en-dessous de la courbe 𝒞 entre A et B.

Fonction convexe :



Fonction concave :



<u>Propriété : Relation entre convexité et tangente.</u>

f est une fonction définie sur un intervalle I et 𝒞 est sa courbe représentative dans un repère.

- Dire que f est convexe sur I signifie que, sur I, la courbe 𝒞 est entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.
- Dire que f est concave sur I, signifie que, sur I, la courbe 𝒞 est entièrement en-dessous de chacune de ses tangentes.

<u>Propriété : Relation entre convexité et fonction dérivée.</u>

f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I si, et seulement si f’ est croissante sur I.
- f est concave sur I si, et seulement si f’ est décroissante sur I.

<u>Propriété : Relation entre convexité et fonction dérivée seconde.</u>

f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I si, et seulement si, pour tout réel x de I, $f''(x) \geq 0$
- f est concave sur I si, et seulement si, pour tout réel x de I, $f''(x) \leq 0$

<u>Démontrons que si f'' est positive, alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes :</u>

Supposons que f'' est positive. f'' est la dérivée de la fonction f'. Donc f' est croissante.
Considérons la fonction g dérivable sur I et définie par :
$g(x)=f(x)-f'(a)(x-a)-f(a)$. Alors : $g'(x)=f'(x)-f'(a)$
Or f' est croissante sur I, donc g' est également croissante.
De plus, $g'(a)=0$. Donc g' est négative pour $x \leq a$ et positive pour $x \geq a$.
On peut donc compléter le tableau de variations de g.

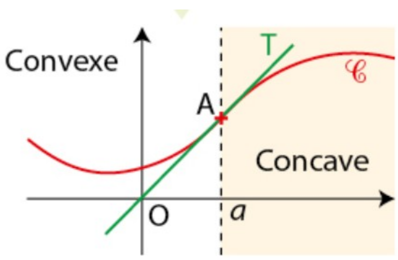
x		a	
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Donc $g(x) \geq 0$ sur I.
Soit $f(x) \geq f'(a)(x-a)+f(a)$
On en déduit que la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes sur I et donc que f est convexe sur I.

<u>III. Point d'inflexion.</u>

<u>Définition :</u>

f est une fonction dérivable sur un intervalle I. $\mathcal{C}$ est sa courbe représentative dans un repère et a$\in$ I.
Dire que A(a ; f(a)) est **un point d'inflexion** de $\mathcal{C}$ signifie qu'au point A, la courbe $\mathcal{C}$ traverse sa tangente.



Conséquence : en l'abscisse a d'un point d'inflexion, la fonction f passe de convexe à concave ou de concave à convexe.

<u>Propriété :</u> f est une fonction dérivable sur un intervalle I. $\mathcal{C}$ est sa courbe représentative dans un repère et a$\in$ I.
Le point A(a ; f(a)) est **un point d'inflexion** de $\mathcal{C}$ si, et seulement si, f'' s'annule en a en changeant de signe.