Exercices : Convexité

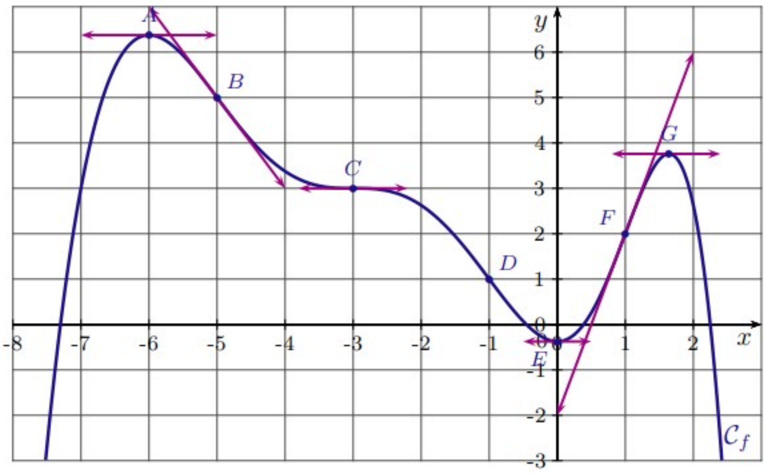
Exercice n°1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ puis que pour tout réel x, $f''(x) = 20x^2(x - 3)$.
2. Dresser en justifiant le tableau de signes de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire l'existence d'un unique point d'inflexion A dont on précisera les coordonnées.
4. Étudier enfin la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°2 :

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.



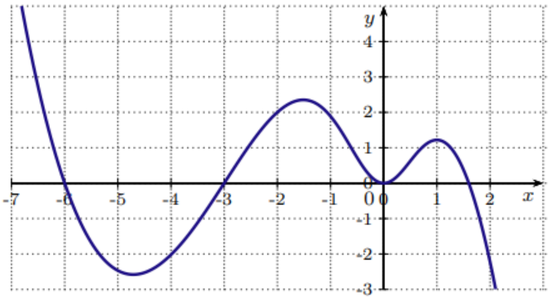
1. La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point F(1; 2) passe par le point de coordonnées (0; −2).
   Déterminer $f'(1)$.
2. La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point D a pour équation $y = -2x - 1$.

(a) Tracer la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point D.
Le point D est-il un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$?

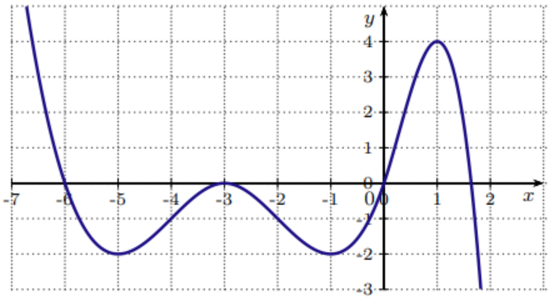
(b) Déterminer $f'(-1)$.

3. Déterminer $f'(-5)$ et $f''(-5)$.
4. Déterminer dans chacun des cas, lequel des trois symboles <, = ou > est approprié :

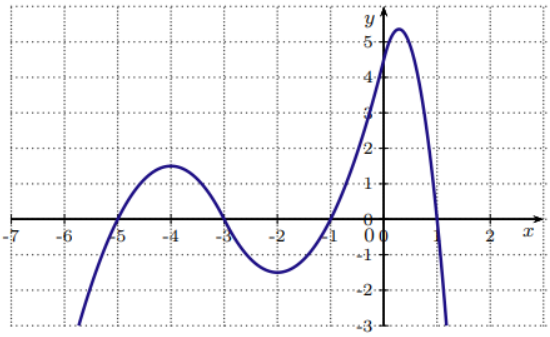
(a) $f'(-6)\ldots 0$ (b) $f'(-7)\ldots f'(-2)$ (c) $f''(-7)\ldots f''(0)$ (d) $f''(1)\ldots 0$ 5. Une des quatre courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$ ci-dessous est la courbe représentative de la dérivée f' et une autre la courbe représentative de la dérivée seconde f''. Déterminer la courbe qui représente la dérivée f' et celle qui représente la dérivée seconde f''.



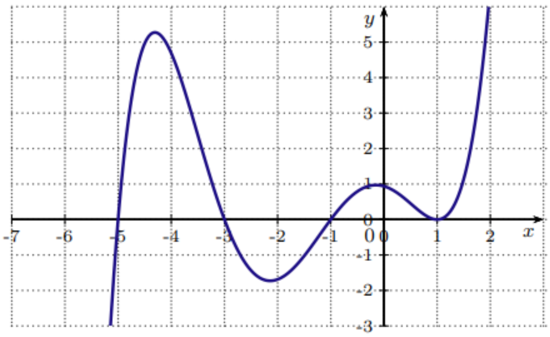
Courbe $\mathcal{C}_1$



Courbe $\mathcal{C}_2$



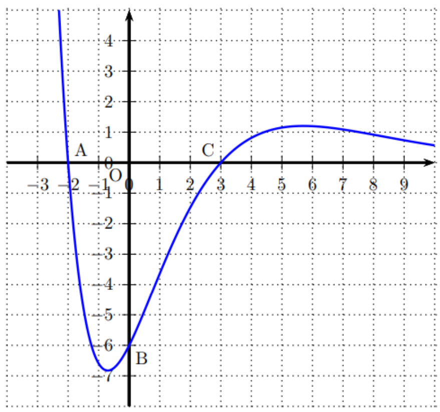
Courbe $\mathcal{C}_3$



Courbe $\mathcal{C}_4$

<u>Exercice n°3 :</u>

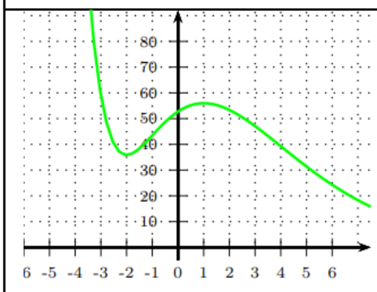
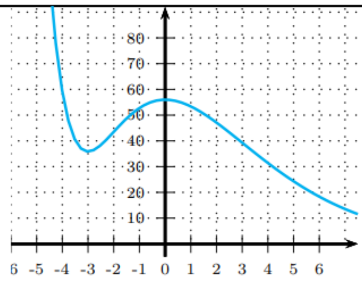
On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, dans un repère orthonormé. Les points suivants appartiennent à la courbe : A(−2 ; 0); B(0 ; −6) et C(3 ; 0).



Courbe représentative de la fonction f''

Dans tout cet exercice, chaque réponse sera justifiée à partir d'arguments graphiques.

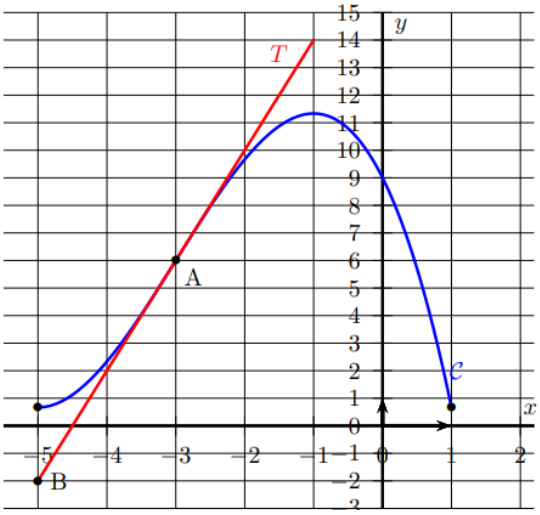
1. La courbe représentative de f admet-elle des points d'inflexion ?
2. Sur [−2 ; 3], la fonction f est-elle convexe ? Est-elle concave ?
3. Parmi les deux courbes données ci-dessous, une seule est la représentation graphique de la fonction f : laquelle ? Justifier la réponse.

Courbe 1	Courbe 2
	

Exercice n°4 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question posée, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Recopier sur la copie le numéro de la question et indiquer la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 0, 5 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

On a représenté dans le repère orthogonal ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle [−5 ; 1]. La droite T est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A(−3 ; 6) et passe par le point B(−5 ; −2). Le point A est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$ sur [−5 ; 1].



1. On note f ′ la fonction dérivée de la fonction f. Alors :

A. $f'(-3) = 6$ B. $f'(-3) = 4$

C. $f'(-3) = \frac{1}{4}$ D. $f'(-3) = \frac{1}{6}$

2. On note f ″ la fonction dérivée seconde de la fonction f. Alors :

A. $f''(-3) = 6$ B. $f''(-3) = 4$

C. $f''(-3) = 0$ D. $f''(-3) = \frac{1}{4}$

3. La fonction f est :

A. convexe sur [−5 ; −3] B. convexe sur [−5 ; −1]

C. convexe sur [−3 ; 1] D. concave sur [−5 ; 1]

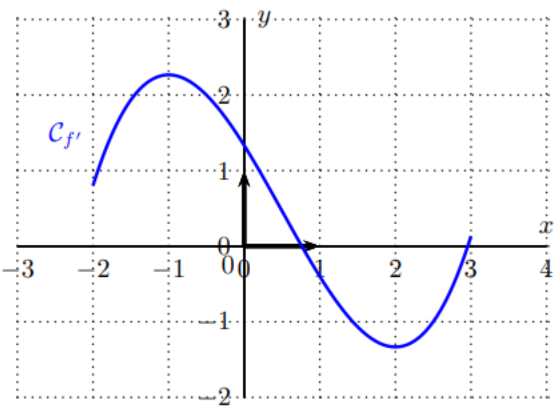
4. La fonction dérivée de f est :

A. décroissante sur [−3 ; −1] B. croissante sur [−3 ; −1]

C. croissante sur [−1 ; 1] D. croissante sur [−5 ; −1]

Exercice n°5 :

On considère une fonction f, définie et dérivable sur [−2 ; 3] et dont la dérivée f ′ est représentée ci-dessous :



Déterminer la convexité de f et préciser les abscisses des éventuels points d'inflexion de sa courbe.